Отсюда $C = \pi - A$, $D = \pi - B$, $F = \pi - E$. Из последних равенств, в частности, заключаем, что

$$A, B, C, D, E, F \in (0, \pi).$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 2. *Объем идеального симметричного октаэдра O в гиперболическом пространства равен*

$$\begin{aligned} Vol(O) &= 2\left(\Lambda\left(\frac{\pi + A + B + E}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi - A - B + E}{2}\right)\right. \\ &+ \left.\Lambda\left(\frac{\pi + A - B - E}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi - A + B - E}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-90705-моб_ст).

ЛИТЕРАТУРА

1. Thurston W. P. *The geometry and topology of three-manifolds.* – Princeton Univ. Math. Dept., 1978.

2. Milnor J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 6. – No 1. – P. 9–24.

Д. А. Байгушев

Лицей "Вторая школа", г. Москва,

IDanila24@gmail.com

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ АРНОЛЬДА

В 1958 г. на своем московском семинаре В.И. Арнольд поставил следующую задачу.

Рассмотрим множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Разобьем его на три блока $\{A, B, C\}$, состоящих соответственно из a, b и c чисел, и переставим их в порядке $\{C, B, A\}$. *Исследовать множество* (C, B, A)*-перестановок Арнольда.*

Эта задача была предложена в порядке упрощения задачи о перекладывании отрезков (см. [1]). Впоследствии задача о перекладывании отрезков активно изучалась (см., например, [2]), в то время как задача о перестановках Арнольда долгое время оставалась неизученной.

Целью данной работы является изучение перестановок Арнольда, состоящих из одного цикла. Такие перестановки мы будем называть *эргодическими*, т. к. они являются дискретным аналогом динамических систем со всюду плотными траекториями.

Теорема 1. (Критерий эргодичности). *Перестановка Арнольда, соответствующая размерам блоков* a, b *и* c, *эргодична, если и только если* НОД $(a + b, b + c) = 1$.

Возникает естественный вопрос, какова (асимптотически) доля эргодических (C, B, A)-перестановок (этот вопрос был поставлен самим Арнольдом в 1958 г.). В случае произвольных перестановок легко доказать, что эта доля равна $1/n$, где n — размер перестановки. Арнольд предположил, что в случае (C, B, A)-перестановок эта доля асимптотически больше $1/n$. Следующая теорема дает полный ответ на этот вопрос.

Теорема 2. *Доля эргодических перестановок Арнольда асимптотически равна* $6/\pi^2$.

Эта теорема хорошо подтверждается компьютерными вычислениями (см. рис. 1). Например, для $n = 10^3$ доля эрго-

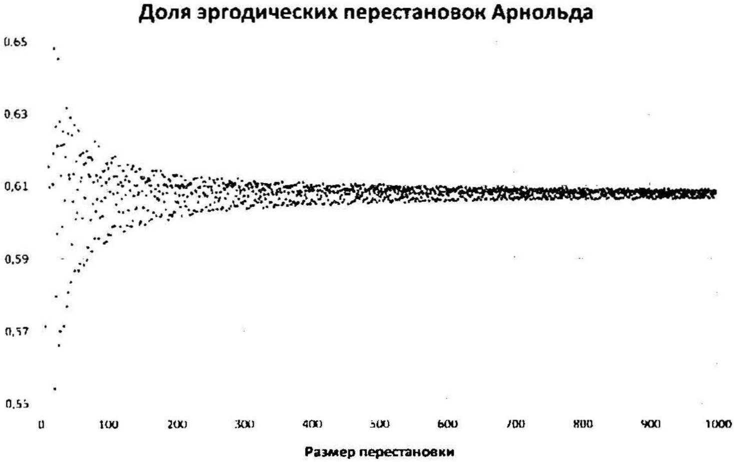

Рис. 1.

дических перестановок равна 0.6086, в то время как $6/\pi^2 \approx$ ≈ 0.6079.

Таким образом, теорема 2 показывает, насколько сильно отличаются обычные и (C, B, A)-перестановки: если доля обычных эргодических перестановок стремится к 0, то эргодических (C, B, A)-перестановок больше половины.

Автор благодарит П.В. Бибикова за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. *Что такое математика.* – М.: МЦНМО, 2008. – 103 с.

2. Оселедец В. И. *О спектре эргодических автоморфизмов* // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 168. – № 5. – С. 1009–1011.

3. Арнольд В. И. *Группы Эйлера и арифметика геометрических прогрессий.* – М.: МЦНМО, 2003 – 43 с.